



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Koło Pasjonatów
Matematyki

Koło Pasjonatów Matematyki

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

ZESTAW NA WIELKI FINAŁ

MIMowych Meczów Matematycznych

22 stycznia 2026

Zadanie 1. Pokaż, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb nieparzystych n , że wszystkie liczby postaci $kn + 1$ dla $0 \leq k \leq \frac{n^2}{5+\epsilon}$ mają przynajmniej po jednej nieparzystej cyfrze w zapisie dziesiętnym.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem, $n \in \mathbb{N}_+$. Macierz nazwiemy binarną jeśli jej elementy zawierają się w zbiorze $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{F}$. Dane są macierze $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i zbiór macierzy binarnych S mocy $2^{n^2}(1 - 2^{1-n}) + 1$. Wiadomo, że

$$\forall_{X \in S} \det(A + X) = \det(B + X)$$

Czy wynika stąd, że $A = B$?

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją (przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$). Udowodnij, że przynajmniej jeden z szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n) + n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{f(n)} \right)$$

jest rozbieżny do $+\infty$.

Zadanie 4. Rzeczywiste zmienne losowe X i Z są określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Załóżmy, że $\mathbb{E}Z = 3$, $\mathbb{P}(Z \in \{0, 1, \dots\}) = 1$, zmienne X i $Z - X$ są niezależne oraz dla dowolnych liczb całkowitych $0 \leq k \leq n$ zachodzi równość

$$\mathbb{P}(X = k, Z = n) = \binom{n}{k} \cdot \frac{2^k}{3^n} \cdot \mathbb{P}(Z = n).$$

Oblicz $\mathbb{P}(X = Z)$.

Zadanie 5. Funkcja $f : \{1, \dots, 2025\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ma tę własność, że dla każdego $k \in \{1, \dots, 2025\}$ istnieje takie $l \in \{1, \dots, 2025\}$, że $\sum_{i=\min\{k,l\}}^{\max\{k,l\}} f(i) \leq 0$. Wyznacz największą możliwą wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^{2025} f(i)$.

Powodzenia!